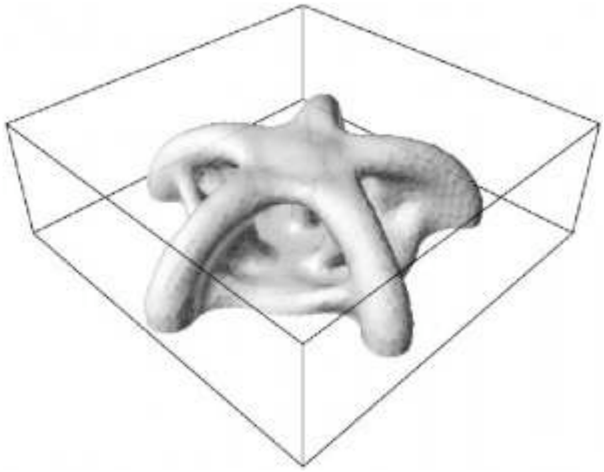
Design et formes optimales (I): Contexte

Grégoire Allaire, François Jouve

Design et formes optimales (I)

Contexte



Le 21 décembre 2009, par **Grégoire Allaire** et **François Jouve**

Cet article en trois parties est consacré à des avancées récentes des mathématiques et du calcul scientifique dans le domaine de l'optimisation de formes ou « optimal design ». Ces progrès ont eu des répercussions immédiates dans l'industrie (aéronautique, automobile, génie civil) en mettant à disposition des ingénieurs des logiciels d'optimisation « automatique » de design d'objets ou de structures.

NOS sociétés modernes sont éprises de « design », ce mot anglais intraduisible en français (le dictionnaire propose le peu convaincant « esthétique industrielle » ou « stylisme »), qui traduit notre volonté d'allier le beau à l'utile. Tout le monde connaît des « designers » célèbres comme **Pininfarina** pour l'automobile, **Starck** pour les objets de la vie quotidienne ou **Le Corbusier** pour l'architecture. On n'imagine plus tous les secteurs économiques cités ci-dessus, et bien d'autres encore, sans ce superflu essentiel ou ce petit supplément d'âme (d'autres diraient ce mercantilisme visuel) ! Bien moins connu du grand public sont les hommes de l'ombre qui s'adonnent à une activité voisine mais bien distincte qui est celle de la conception optimale ou de l'optimisation de formes (« optimal design » en anglais). Loin de toute préoccupation esthétique ou « marketing » ces scientifiques, ingénieurs ou chercheurs, veulent améliorer les formes des objets industriels qu'ils conçoivent (structure mécanique, profil aérodynamique, antenne, composants électroniques, etc.) afin d'en augmenter des propriétés physiques essentielles (solidité, efficacité, durabilité). Malheureusement dans ce monde imparfait mais bien réel, il y a des contraintes qu'on ne peut ignorer : le coût, la faisabilité industrielle, mais aussi le poids ou le volume des structures, ou bien tout autre propriété physique importante. Par exemple, il parait clair que plus un objet est volumineux et lourd, plus il est solide (et réciproquement) : ainsi la solidité et le poids d'une structure mécanique sont des objectifs contradictoires. Concrètement, un avion doit être solide mais il doit tout de même voler en consommant le moins possible de carburant. L'optimisation d'une fonction, dite objectif, sous des contraintes devant être satisfaites par la solution « optimale » est un problème classique en mathématiques. Il est donc normal que la question des formes optimales touche ainsi aux mathématiques.

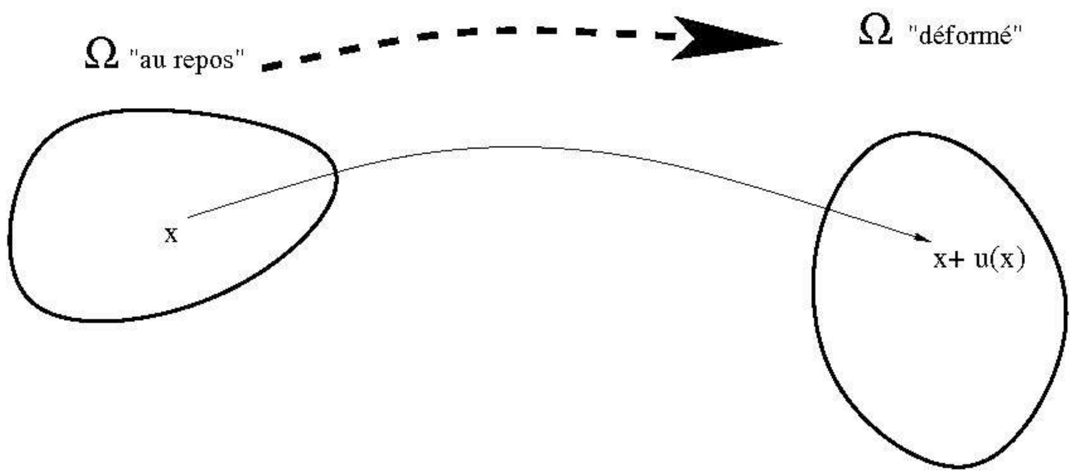
Mais où sont précisément les mathématiques dans tout cela ? Eh bien, grâce au formidable développement de la puissance de calcul des ordinateurs, elles sont devenues essentielles dans **l'automatisation** de ce processus d'optimisation. En effet, la méthode traditionnelle d'optimisation était de procéder par **essais et erreurs**, suivant le savoir faire et l'intuition de l'ingénieur : on essaye une forme dont on calcule la performance puis, en fonction de cette dernière, on la modifie pour essayer de l'améliorer et on recommence jusqu'à obtention d'une forme satisfaisante (à défaut d'être optimale). Cette façon de faire « manuelle » est très lente, coûteuse et imprécise. De plus en plus, elle est remplacée par des logiciels d'optimisation numérique qui représentent la forme par un nombre limité de paramètres descriptifs (généralement des points de contrôle sur les bords), et l'améliorent itérativement en faisant varier ces paramètres de manière automatique. C'est dans ces logiciels que se cachent les mathématiques, parfois anciennes, mais plus souvent extrêmement « pointues » et issues d'une recherche contemporaine. Nous allons essayer de décrire ce type d'approche dans le cadre de la mécanique du solide et de présenter des développements récents sur l'optimisation géométrique et topologique de formes qui ont un impact considérable dans l'industrie, notamment automobile et aéronautique.

Le contexte : calcul des structures

Parmi les nombreux domaines d'application des techniques d'optimisation de formes nous choisissons celui des structures mécaniques, d'une part car les progrès récents de l'optimisation de formes y ont été spectaculaires, et d'autre part car nous connaissons bien ce domaine... Expliquons rapidement les concepts fondamentaux de la mécanique des solides. Une structure mécanique est donc un objet solide qui, soumis à des forces extérieures (appelées aussi chargement) et contraint à certaines conditions aux limites (une partie de son bord peut être encastrée, libre ou bien chargée), se déforme pour atteindre une configuration d'équilibre (les forces extérieures sont exactement compensées par les efforts ou contraintes internes). Cette déformation peut être réversible ou non : lorsqu'on annule les forces extérieures, la structure revient dans sa forme initiale ou non (penser à une barre de métal que l'on tord : si c'est de l'acier, elle reviendra à sa forme initiale, si c'est du fer, elle restera tordue). Pour simplifier la présentation nous nous limitons à des déformations réversibles et plus précisément élastiques. On peut aussi faire l'hypothèse de petites déformations et petits déplacements, ce qui conduit au modèle des équations de **Lamé** ou de l'élasticité linéarisée (voir bloc dépliable 1). Le but d'un ingénieur en calcul des structures est ainsi de résoudre ces équations pour prédire le comportement d'une structure mécanique en fonction du chargement effectué. Plus précisément, il doit calculer son déplacement, sa déformation et ses contraintes internes afin de vérifier, par exemple, que les contraintes n'atteignent pas un seuil maximal (dépendant de la nature du matériau) à partir duquel apparaissent des phénomènes irréversibles comme la plasticité, l'endommagement ou la fissuration qui peuvent conduire à la ruine de la structure.

1. Équations de Lamé ou de l'élasticité linéarisée

Ces équations décrivent la réponse statique et élastique d'une structure mécanique soumise à des efforts extérieurs dans l'hypothèse de petits déplacements et petites déformations. L'inconnue est une fonction vectorielle (un champ de vecteurs) $\vec{u}$*, appelée* ***déplacement****, telle que tout point* $\vec{x}$ *de la structure au repos* Ω *se déplace en une nouvelle position* $\vec{x} + \vec{u}(\vec{x})$ *sous l'effet des forces appliquées, notées* $\vec{f}$*.*



Définition du déplacement élastique

Le déplacement élastique $\vec{u}(x)$ permet de passer de la configuration au repos à la configuration déformée d'une structure soumise à des forces.

On associe à ce déplacement le tenseur des déformations, noté $e(\vec{u})$, qui est une matrice symétrique, défini comme le gradient symétrisé du déplacement

$$e(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{1 \le i,j \le 3},$$

*où (u_1, u_2, u_3) sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ et (x_1, x_2, x_3) celles du point $\vec{x}$. On définit alors le tenseur des contraintes σ à l'aide de la loi de **Hooke** qui, pour les matériaux isotropes, dépend de deux paramètres (fonction du type de matériau) appelés modules de Lamé μ et λ*

$$\sigma = 2\mu e(\vec{u}) + \lambda \mathrm{Tr}(e(\vec{u}))\mathrm{Id}$$

où Id est la matrice identité. On écrit alors la loi de bilan ou d'équilibre des forces

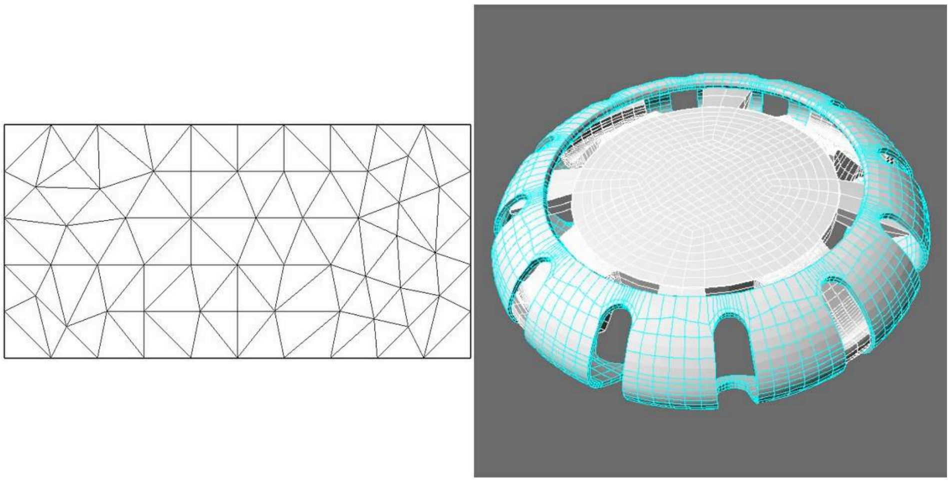
$$-\mathrm{div}\,\sigma = \vec{f}$$

que l'on complète par des conditions aux limites qui indiquent quelle partie du bord de la structure Ω est fixée ou bien est libre.

A part dans quelques cas d'école, exceptionnellement simples, il n'est pas possible de calculer analytiquement (« à la main ») les solutions de ces équations de Lamé. L'ingénieur doit donc utiliser un logiciel de calcul numérique sur ordinateur qui lui fournit une solution approchée à la précision demandée (plus grande est la précision voulue, plus grand est le coût du calcul en termes de mémoire requise et de temps d'exécution). L'immense majorité de ces logiciels de calcul utilise la méthode dite des **éléments finis**. Le principe de cette méthode est de découper la structure en petits morceaux (typiquement, des triangles dans le plan ou des tétraèdres dans l'espace) et de supposer que la solution approchée est d'un type très simple sur chacun de ses morceaux (par exemple, affine). La méthode des éléments finis permet ainsi de calculer une solution approchée des équations de Lamé à l'aide d'un ordinateur (voir bloc dépliable 2).

2. Méthode des éléments finis

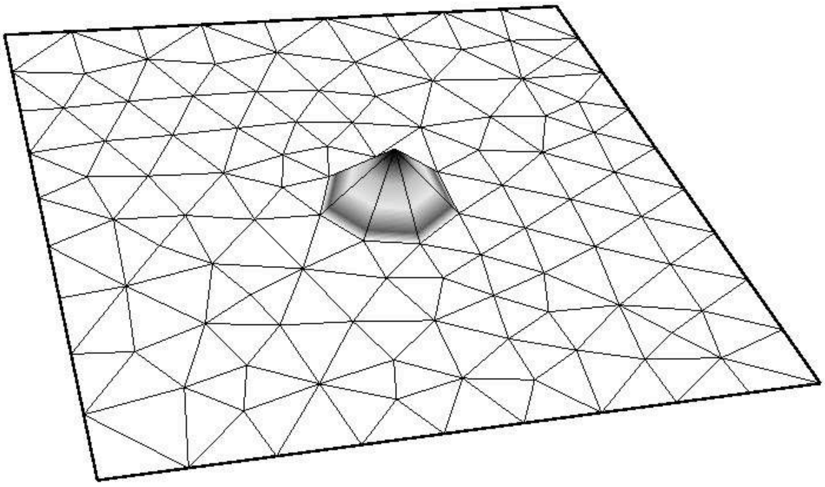
*Le principe de la méthode des éléments finis est de découper le domaine de calcul en petits morceaux (par exemple des triangles ou des rectangles dans le plan, des tétraèdres ou des prismes à base triangulaire ou rectangulaire dans l'espace à trois dimensions). Ce découpage en morceaux de la structure est appelée **maillage**, voir la figure ci-dessous. Cette idée est reprise aussi dans d'autres domaines comme la CAO (conception assistée par ordinateur) ou l'animation graphique, et chacun a déjà pu voir dans des publicités pour des objets technologiques ces images facettées d'un monde virtuel étrange et fascinant !*



Deux exemples de maillage

Maillage triangulaire plan à gauche, maillage quadrangulaire volumique à droite

Une fois construit un maillage on lui associe une base d'un espace de fonctions parmi lesquelles on va chercher une solution approchée de l'équation à résoudre. Il existe de nombreux choix possibles de telles bases ***d'éléments finis****. La base la plus simple, pour un maillage triangulaire, consiste à définir des fonctions qui sont globalement continues sur le domaine et affine par morceaux sur chaque triangle. On calcule alors numériquement une solution approchée de l'équation à résoudre qui est, en quelque sorte, une projection de la solution exacte sur cette base d'éléments finis.*



Fonction de base en éléments finis

Fonction de base de la méthode P1 des éléments finis qui vaut 1 sur un noeud du maillage et 0 sur tous les autres et qui est affine par triangle, globalement continue.

Historiquement, les premières prémices de la méthode des éléments finis ont été proposées par le mathématicien ***Richard Courant*** *(sans utiliser cette dénomination) dans les années 1940, mais ce sont les mécaniciens qui ont développé, popularisé, et démontré l'efficacité de cette méthode dans les années 1950-1960 (en plus de lui donner son nom actuel). Après ces premiers succès pratiques, les mathématiciens ont alors considérablement développé les fondations théoriques de la méthode et proposé des améliorations significatives. C'est en tout cas un bel exemple de coopération inter-disciplinaire où les efforts conjugués des mécaniciens et des mathématiciens appliqués ont fait faire des progrès immenses à la simulation numérique (sans négliger non plus les avancées encore plus spectaculaires de la puissance des ordinateurs).*

Pour en revenir à notre ingénieur en calcul des structures, une quantité importante qu'il peut obtenir numériquement, et dont la valeur peut lui permettre de décider si la structure est solide ou non, est la **compliance** ou complaisance, définie comme le travail des forces extérieures. Plus précisément, il s'agit de l'intégrale des forces multipliées par le déplacement et un théorème classique (attribué à **Thomson**) affirme qu'elle est aussi égale à l'énergie élastique de déformation stockée dans la structure. Concrètement, plus une structure « travaille », c'est-à-dire plus grande est la compliance, plus elle est souple. Au contraire, plus petite est la compliance, plus rigide est la structure. Dans la **suite** nous allons donc nous servir de la compliance comme une mesure de la rigidité globale d'une structure mécanique.

Pour citer cet article : **Grégoire Allaire** et **François Jouve**, **« Design et formes optimales (I) »** — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2009. En ligne, URL : `http://images.math.cnrs.fr/Design-et-formes-optimales-I.html`